

Messung der Kenndaten eines Torsions-Drehspulgalvanometers

1. Kenndaten

Das Galvanometer ist ein Gerät zur Messung sehr kleiner Stromstärken. Bei einem Drehspul-Instrument mit Torsionssystem ist der Winkelausschlag φ des Lichtzeigers proportional zum Strom I , der durch die Drehspule und damit durch den Messkreis fließt. Die wichtigste Kennzahl eines Galvanometers ist deshalb seine Stromempfindlichkeit C_I , der Proportionalitätsfaktor zwischen Stromstärke I und Zeigerausschlag φ . Weitere charakteristische Galvanometerdaten sind in der nachfolgenden Tabelle aufgelistet.

Größe	Definition, Bemerkungen ¹
Stromempfindlichkeit C_I	$\varphi = C_I I$
Spannungsempfindlichkeit C_U	$C_U = \frac{C_I}{R_i + R_a}$ R_a Widerstand des Messkreises, R_i Innenwiderstand
Ballistische Empfindlichkeit C_B	$\varphi_B = C_B Q$ Q Ladung, durch das Instrument fließt
Innenwiderstand R_i	Ohmscher Widerstand der Drehspule
Aperiodischer Grenzwiderstand $R_{a,Gr}$	Widerstand des Messkreises, bei dem sich das Instrument im aperiodischen Grenzfall bewegt
(Kreis-)Frequenz der freien Schwingung ω_0	$\omega_0 = 2\pi / T_0$, T_0 Schwingungsdauer der ungedämpften Schwingung des Torsionspendels
Galvanometerkonstante G	$G = NBA$, A Spulenfläche, B Magnetfeldstärke, N Windungszahl der Spule
Trägheitsmoment des Torsionspendels J	
Winkelrichtgröße des Torsionspendels D	
Luftreibungskoeffizient des Torsionspendels ρ	

Im Folgenden werden Messungen dieser Kenndaten beschrieben. Sie wurden ausgeführt an einem Galvanometer vom Typ *UG6* der Firma *Ruhstrat*. Der magnetische Nebenschluss war dabei vollständig unterbrochen.

2. »Direkte« Messung der Stromempfindlichkeit C_I

Die Messanordnung zur „direkten“ Messung von C_I zeigt Abbildung 1. Als Spannungsquelle dient eine 1,5 V-Zelle. Mit Hilfe eines Potentiometers greift man eine Teilspannung U ab, die von einem (Digital-)Voltmeter angezeigt wird. Die Spannung U fällt im Galvanometerkreis an einem

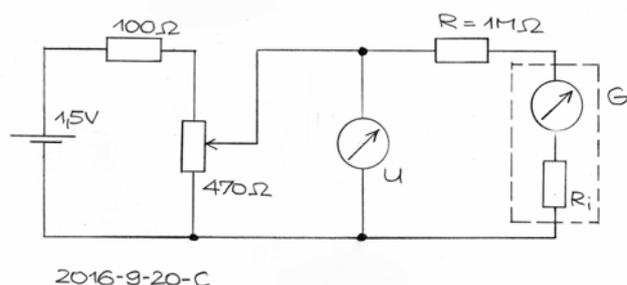


Abbildung 1 "Direkte" Messung der Stromempfindlichkeit C_I

Vorwiderstand $R = 1 \text{ M}\Omega$ und dem Innenwiderstand R_i des Instruments ab. Da der Innenwiderstand R_i des Galvanometers gegenüber dem Vorwiderstand R vernachlässigbar klein ist, folgt für die Stromstärke im Galvanometerkreis $I = U/1 \text{ M}\Omega$. Man variiert U und misst die zugehörigen Zeigerausschläge φ . Das Ergebnis zeigt Tabelle 1.

Tabelle 1 „Direkte“ Messung, Messanordnung siehe Abbildung 1: Teilspannung U und damit I variiert, gemessen wird der Winkelausschlag φ (2016_9_20_C)

U / V	$I / \mu\text{A}$	φ / rad
0,275	0,275	0,0104
0,418	0,418	0,0162
0,613	0,613	0,0236
0,801	0,801	0,0308
1,034	1,034	0,0392
1,283	1,283	0,0490

Die Daten der Tabelle 1 sind in Abbildung 2 dargestellt. Aufgetragen ist der Zeigerwinkel φ als Funktion des Stroms I . Die Proportionalität zwischen beiden Größen ist evident: An die

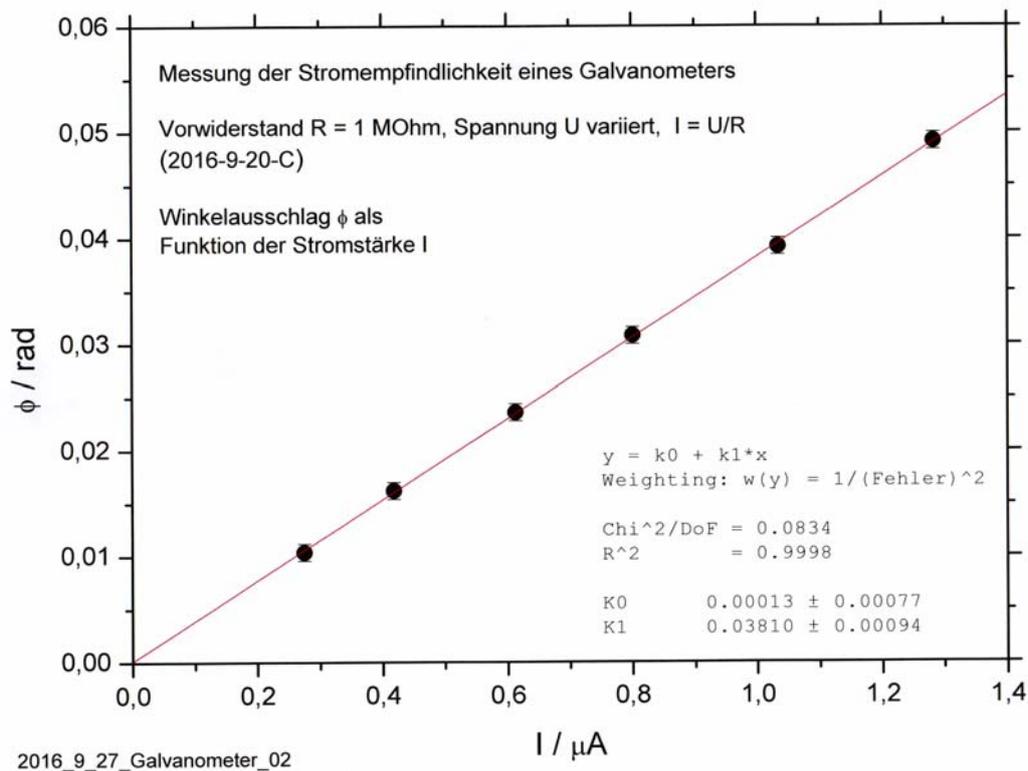


Abbildung 2 Stromempfindlichkeit des Galvanometers, gemessen in der Schaltung Abbildung 1, siehe Text.

Messpunkte kann eine Nullpunktsgerade mit $\chi^2/\text{Freiheitsgrad} = 0,083$ und $R^2 = 0,9998$ angepasst werden. Die Steigung der Geraden ist die gesuchte Stromempfindlichkeit. Die Anpassung ergibt $C_I = (3,81 \pm 0,01) \cdot 10^{-2} \text{ rad}/\mu\text{A}$

3. Messung der Stromempfindlichkeit C_I und des Innenwiderstands R_i in einer Schaltung mit Parallelwiderstand R_S

Es gibt zwei Methoden, in ein und derselben Messreihe zusätzlich zur Stromempfindlichkeit auch den Innenwiderstand des Galvanometers zu bestimmen. Bei der ersten dieser Methoden schaltet man einen Widerstand R_S (10 ... 200 Ω) parallel zum Galvanometer und lässt durch diese Parallelschaltung einen konstanten Strom fließen. Den konstanten Strom erzeugt man, indem man Galvanometer und Parallelwiderstand über einen 1 M Ω -Widerstand an die 1,5 V-Zelle anschließt. Abbildung 3 zeigt den Stromlaufplan der Messanordnung. Da die Parallelschaltung von R_S und dem

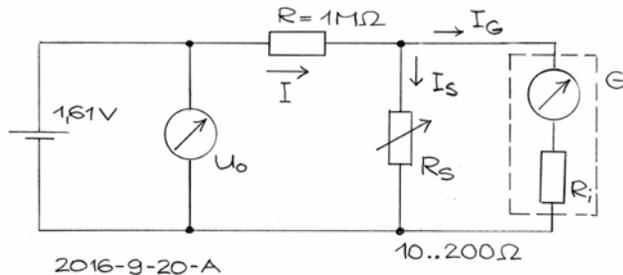


Abbildung 3 Messung der Stromempfindlichkeit C_I und des Innenwiderstands R_i mit Parallelwiderstand R_S

Innenwiderstand R_i des Galvanometers einen gegenüber 1 M Ω vernachlässigbar kleinen Widerstand hat, fließt im unverzweigten Teil des Stromkreises ein konstanter Strom² von etwa 1,5 μ A. Man variiert R_S und misst wiederum den Winkelausschlag φ .

Der Strom I im unverzweigten Teil des Kreises teilt sich auf in den Strom I_G durch das Galvanometer und den Strom I_S durch den Parallelwiderstand R_S , also $I = I_G + I_S$. Für die Zweigströme gilt nach Kirchhoff

$$\frac{I_S}{I_G} = \frac{R_i}{R_S} \quad \text{oder} \quad I_S = \frac{R_i}{R_S} I_G.$$

Damit wird

$$I = I_G \left(1 + \frac{R_i}{R_S} \right).$$

Die Batteriespannung (1,5 V-Zelle) sei U_0 . Dann gilt wegen $R \gg R_i$ und $R \gg R_S$

$$I \cong \frac{U_0}{R},$$

folgt

$$\frac{U_0}{R} = I_G \left(1 + \frac{R_i}{R_S} \right).$$

Mit $I_G = \varphi / C_I$ wird daraus

$$\frac{U_0}{R} = \frac{\varphi}{C_I} \left(1 + \frac{R_i}{R_S} \right)$$

und nach Umformung

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{R}{C_I U_0} + \frac{R R_i}{C_I U_0} \cdot \frac{1}{R_S}.$$

Das heißt, die Messpunkte von φ^{-1} , aufgetragen als Funktion von R_S^{-1} , sollten auf einer Geraden liegen mit dem Achsenabschnitt $K_0 = R/C_I U_0$ und der Steigung $K_1 = RR_i / C_I U_0$. Die Werte von K_0 und K_1 folgen aus der Anpassung der Geraden an die Messpunkte (nach der Methode der kleinsten Quadrate). Stromempfindlichkeit und Innenwiderstand ergeben sich damit zu

$$C_I = \frac{R}{K_0 U_0} \quad \text{bzw.} \quad R_i = \frac{K_1}{K_0}$$

Tabelle 2 zeigt die gemessenen Werte und Abbildung 4 deren Auftrag als $\varphi^{-1} = f(R_S^{-1})$ im Koordinatensystem. Dabei waren $U_0 = 1,609 \text{ V}$ und $R = 1,008 \text{ M}\Omega$.

Tabelle 2 Messung mit Parallelwiderstand R_S , Messanordnung siehe Abbildung 3: Zellenspannung $U_0 = 1,61 \text{ V}$ und Vorwiderstand $R = 1,01 \text{ M}\Omega$ konstant, Parallelwiderstand R_S variiert, gemessen wird der Winkelausschlag φ (2016_9_20_A)

R_S / Ω	R_S^{-1} / Ω^{-1}	φ / rad	$\varphi^{-1} / \text{rad}^{-1}$
10	0,100	0,009799	102,05
20	0,050	0,016594	60,26
30	0,033	0,021786	45,90
40	0,025	0,025677	38,94
50	0,020	0,028868	34,64
100	0,010	0,039120	25,56
200	0,005	0,048448	20,64

Die Anpassung einer Geraden an die Punkte ergibt $K_0 = 16,29 \pm 0,20 \text{ rad}^{-1}$ und $K_1 = 898,5 \pm 16,0 \text{ rad}^{-1}/\Omega^{-1}$. Daraus folgen $C_I = R / K_0 U_0 = (3,82 \pm 0,05) \cdot 10^{-2} \text{ rad}/\mu\text{A}$ und $R_i = K_1 / K_0 = 55,2 \pm 1,7 \Omega$.

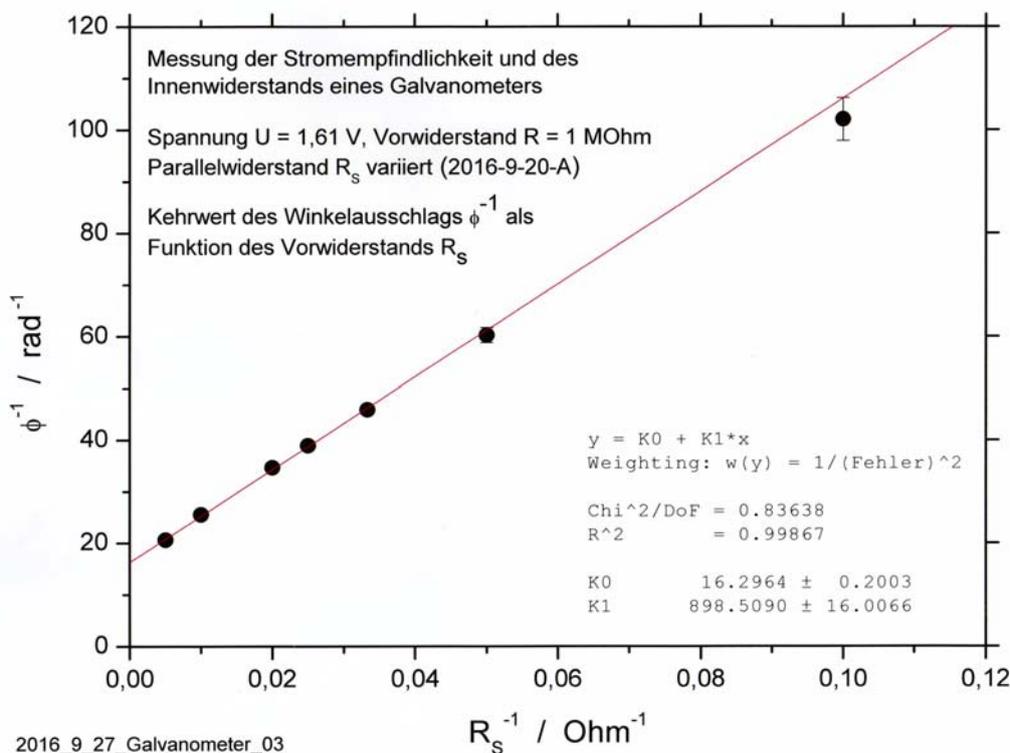


Abbildung 4 Stromempfindlichkeit und Innenwiderstand des Galvanometers. Messung mit Parallelwiderstand R_S - Schaltung Abbildung 3.

4. Messung der Stromempfindlichkeit C_I und des Innenwiderstands R_i in einer Schaltung mit Vorwiderstand R_X

Die zweite Methoden, Stromempfindlichkeit und gleichzeitig Innenwiderstand des Galvanometers zu bestimmen, benutzt eine Schaltung, in der das Galvanometer zusammen mit einem Vorwiderstand R_X ($10 \dots 50 \Omega$) an eine Konstantspannungsquelle angeschlossen wird. Abbildung 5 zeigt den Stromlaufplan. Der Innenwiderstand der Spannungsquelle muss klein sein gegenüber dem

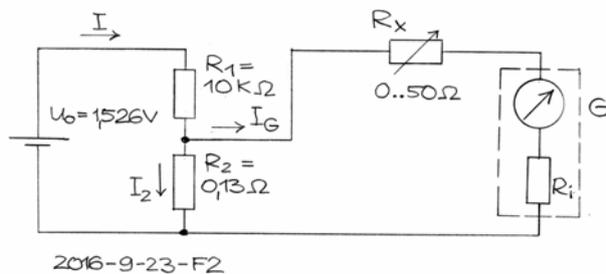


Abbildung 5 Messung der Stromempfindlichkeit C_I und des Innenwiderstands R_i mit Vorwiderstand R_X

der Reihenschaltung aus Vorwiderstand R_X und Galvanometer. Das erreicht man dadurch, dass man die Spannung des Galvanometerkreises an dem kleinen $0,13 \Omega$ -Widerstand R_2 der Potentiometerschaltung abgreift, der parallel zur $1,5 \text{ V}$ -Zelle liegt. Die Spannung, die an ihm abfällt, beträgt etwa $(0,13 \Omega / 10^4 \Omega) \cdot 1,5 \text{ V} \cong 20 \mu\text{V}$. Variiert wird R_X , gemessen der Zeigerausschlag φ .

Zur Auswertung der Messdaten betrachte die Ströme in der vorliegenden Schaltung (Abbildung 5): Da $R_2 \ll R_1$, ist I in guter Näherung $I = U_0 / R_1$. Der Strom $I = I_G + I_2$ verzweigt sich gemäß

$$\frac{I_2}{I_G} = \frac{R_X + R_i}{R_2}.$$

Damit wird

$$I = I_G \left(1 + \frac{R_X + R_i}{R_2} \right) = \frac{R_2 + R_X + R_i}{R_2} I_G,$$

so dass folgt

$$I_G = \frac{R_2}{R_2 + R_X + R_i} I = \frac{R_2}{R_2 + R_X + R_i} \cdot \frac{U_0}{R_1}.$$

Der Zeigerausschlag wird somit zu

$$\varphi = C_I I_G = C_I \frac{R_2}{R_1} U_0 \cdot \frac{1}{R_2 + R_X + R_i}.$$

Sein Kehrwert ist

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{R_1}{C_I U_0 R_2} \cdot (R_2 + R_X + R_i) = \frac{R_1}{C_I U_0 R_2} \cdot R_X + \frac{R_1}{C_I U_0 R_2} (R_2 + R_i).$$

Das heißt, die Messpunkte von φ^{-1} , aufgetragen als Funktion von R_X , sollten auf einer Geraden liegen mit dem Achsenabschnitt $K_0 = R_1(R_2 + R_i)/(C_I U_0 R_2)$ und der Steigung $K_1 = R_1/(C_I U_0 R_2)$. Die Werte von K_0 und K_1 folgen aus der Anpassung der Geraden an die Messpunkte nach der Methode der kleinsten Quadrate. Stromempfindlichkeit und Innenwiderstand ergeben sich damit zu

$$(7) \quad C_I = \frac{R_1}{K_1 U_0 R_2} \quad \text{bzw.} \quad R_i = \frac{K_0}{K_1} - R_2 \cong \frac{K_0}{K_1}.$$

Die gemessenen Werte zeigt Tabelle 3. Die Messpunkte von φ^{-1} , aufgetragen als Funktion von R_x , sind in Abbildung 6 dargestellt.

Tabelle 3 Messung mit konstanter Spannung $U_0 = 1,526 \text{ V}$, Spannungsteiler $R_1/R_2 = 10 \text{ k}\Omega/0,13 \text{ }\Omega$ und verschiedenen Vorwiderständen R_x , gemessen Winkelausschlag φ (2016_9_23_F2)

R_x / Ω	φ / rad	$\varphi^{-1} / \text{rad}^{-1}$
0	0,01280	78,142
10	0,01190	84,050
20	0,00999	100,013
30	0,00880	113,648
40	0,00800	125,011
50	0,00760	131,589

Die Anpassung einer Geraden an die Punkte ergibt $K_0 = 76,39 \pm 1,02 \text{ rad}^{-1}$ und $K_1 = 1,146 \pm 0,053 \text{ rad}^{-1}/\Omega$. Daraus folgen die Stromempfindlichkeit $C_I = R_1 / (K_1 U_0 R_2) = (4,40 \pm 0,98) \cdot 10^{-2} \text{ rad}/\mu\text{A}$ und der Innenwiderstand $R_i = K_0/K_1 = 66,7 \pm 4,0 \text{ }\Omega$.

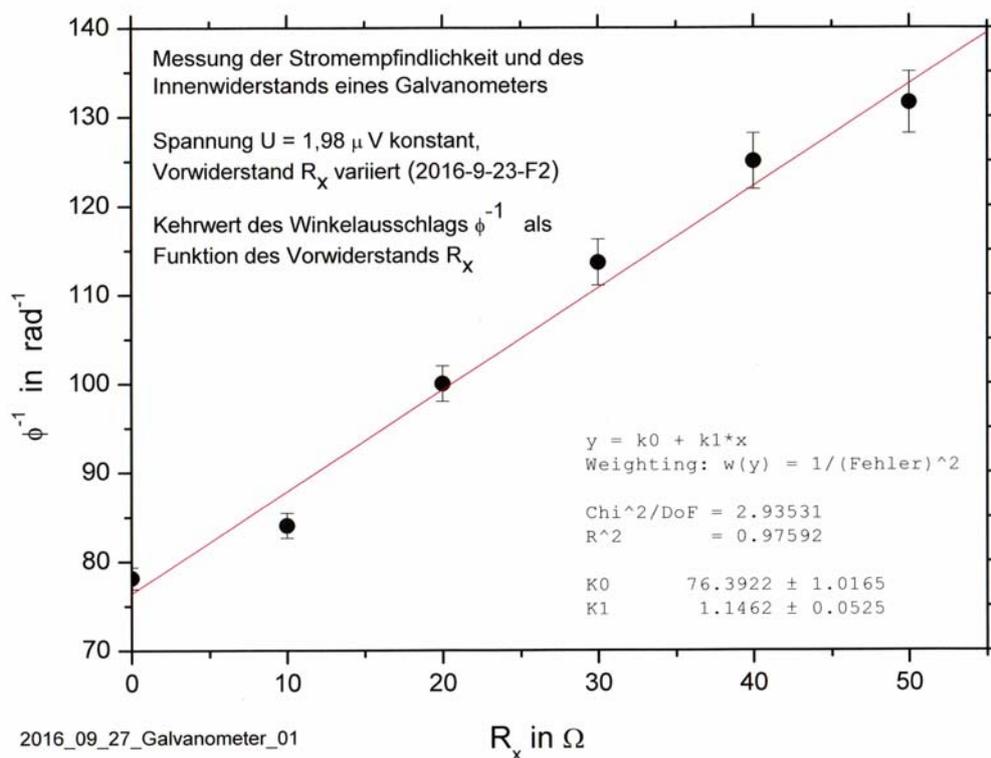


Abbildung 6 Stromempfindlichkeit des Galvanometers. Messung mit Vorwiderstand R_x - Schaltung Abbildung 4.

Damit liegen jetzt drei Messwerte der Stromempfindlichkeit C_I vor. Sie stimmen innerhalb der Fehlergrenzen überein. Das gewogene Mittel ist

$$C_I = (3,84 \pm 0,07) \cdot 10^{-2} \frac{\text{rad}}{\mu\text{A}}$$

und wird als Ergebnis der Messung betrachtet. Der Fehler beträgt etwa $\pm 2\%$.

Die beiden Messwerte des Galvanometerwiderstands R_i ($55,2 \pm 1,7 \Omega$ und $66,7 \pm 4,0 \Omega$) stimmen auch bei Berücksichtigung der Fehler nicht überein. Einen Grund dafür könnte sein, dass bei beiden Messungen die Widerstandsanpassung nicht ideal war: Der Innenwiderstand der effektiv wirksamen Spannungsquelle (Messung mit Vorwiderstand R_X) könnte noch zu groß, der der Stromquelle (Messung mit Parallelwiderstand R_S) noch zu klein gewesen sein. Als Ergebnis der Messung wird das gewichtete Mittel der beiden gemessenen Werte angegeben:

$$R_i = 58,6 \pm 5,3 \Omega.$$

Der Fehler beträgt etwa $\pm 9\%$.

5. Messung der Schwingungsdauer T und der Abklingkonstanten β

Ist die (Kreis-)Frequenz ω_0 der freien Schwingung größer als die Abklingkonstante β , pendelt sich der Galvanometerzeiger in einer abklingenden Schwingung auf die statische Ruhelage des Messwertes ein. Der zeitliche Verlauf des Zeigerausschlags ist in diesem Fall gegeben durch

$$(8) \quad \varphi(t) = \phi_0 \exp(-\beta t) \left[\cos(\omega t) + \frac{\beta}{\omega} \sin(\omega t) \right] + \varphi_0.$$

Dabei ist φ_0 die statische Ruhelage des Zeigers (der Messwert), ϕ_0 dessen Anfangsauslenkung, bezogen auf φ_0 , und ω die (Kreis-)Frequenz der Schwingung. Diese ist mit ω_0 verknüpft durch

$$(9) \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

Die Abklingkonstante β hängt u. a. ab vom Außenwiderstand R_a des Messkreises und ist gegeben durch

$$(10) \quad \beta = \frac{1}{2J} \left(\rho + \frac{G^2}{R_a + R_i} \right).$$

Das heißt, außer R_a gehen in β die Galvanometerdaten J (das Trägheitsmoment des Torsionsystems), ρ (der Luftreibungskoeffizient), G (die Galvanometerkonstante) und R_i (der Innenwiderstand der Drehspule) ein. Durch eine Messung von β lässt sich der Quotient $G^2/2J$ dieser Daten bestimmen. Dazu beachte man, dass für einen offenen Messkreis ($R_a = \infty$) die Abklingkonstante ihren kleinsten Wert

$$(11) \quad \beta_\infty = \frac{1}{2J} \rho$$

annimmt. Damit wird der Kehrwert der Differenz $\beta - \beta_\infty$ zu

$$(12) \quad \frac{1}{\beta - \beta_\infty} = \frac{2J}{G^2} (R_a + R_i) = \frac{2J}{G^2} R_a + \frac{2J}{G^2} R_i.$$

Misst man daher β in Abhängigkeit von R_a , sollten die Messpunkte von $1/(\beta - \beta_\infty)$, aufgetragen als Funktion von R_a , auf einer Geraden mit der Steigung $2J/G^2$ und dem Achsenabschnitt $2JR_i/G^2$ liegen.

Die Anordnung einer solchen Messung zeigt Abbildung 7. Mit Hilfe eines Potentiometers wird ein kleiner Teil der Zellenspannung (1,5 V) als „Spannungsquelle“ für den Galvanometerkreis abgegriffen. Dieser besteht aus dem 100 k Ω -Vorwiderstand, der Parallelschaltung von Galvanometer und Messkreiswiderstand R_a , und wird durch Drücken des Tasters Ta geschlossen.

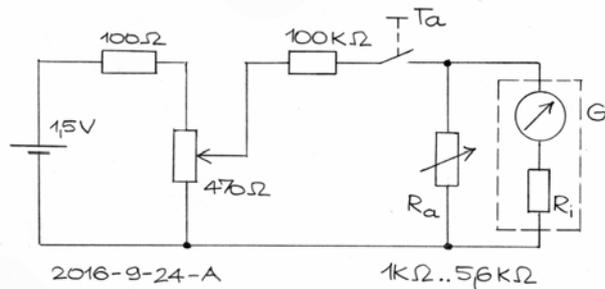


Abbildung 7 Messung der Schwingungsdauer T in Abhängigkeit vom Messkreiswiderstand R_a

Zur Messung wird der Taster so lange gedrückt, bis der Galvanometerzeiger bei einem nicht zu kleinen Ausschlag (etwa $\phi_0 = 15^\circ$) zur Ruhe gekommen ist. Dann wird der Taster geöffnet. Der Galvanometerkreis besteht jetzt nur aus dem Instrument und dem äußeren Widerstand R_a , so dass sich der Lichtzeiger in einer gedämpften Schwingung auf den Nullpunkt der Scala einpendelt. Dabei werden die Maximalausschläge ϕ_k des Zeigers verfolgt³. Diese stellen sich ein für $\omega t = 2\pi k$ oder $t = 2\pi k/\omega = kT$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) und haben die Werte

$$\phi_k = \phi_0 \exp(-\beta 2\pi k / \omega).$$

Die Abklingkonstante ergibt sich aus dem Quotient zweier Maximalausschläge. Misst man z. B. die Maximalausschläge mit den Platzziffern k und $k + n$, so ist ihr Quotient

$$\frac{\phi_{k+n}}{\phi_k} = \exp(-\beta 2\pi n / \omega)$$

und dessen Logarithmus

$$\ln \frac{\phi_{k+n}}{\phi_k} = -\beta \frac{2\pi n}{\omega}.$$

Division durch $nT = 2\pi n/\omega$ ergibt

$$(13) \quad \beta = -\frac{1}{nT} \ln \frac{\phi_{k+n}}{\phi_k}.$$

Zur Bestimmung von β misst man daher den Zeigerausschlag ϕ_k der k -ten Schwingung, den Ausschlag ϕ_{k+n} nach weiteren n Schwingungen, und die zugehörige Schwingungsdauer T . Damit sind alle Größen auf der rechten Seite von Gl. (13) bekannt. Die Größe $\beta T = \ln(\phi_k/\phi_{k+1})$ heißt in der Literatur bekanntlich *logarithmisches Dekrement* (Spezialfall von Gl. (13) für $n = 1$).

Das Ergebnis der Messung von β in Abhängigkeit von R_a zeigt Tabelle 4. Da der aperiodische Grenzwiderstand des Galvanometers laut Herstellerangaben etwa 600Ω beträgt, ist es nicht sinnvoll, Messkreiswiderstände R_a mit Werten kleiner als etwa $1 \text{ k}\Omega$ zu verwenden. Für $R_a = 1 \text{ k}\Omega$ war eine Schwingung gerade noch erkennbar (genau *ein* Überschwinger vor dem Einschwenken in die Ruhelage).

Die letzte Zeile von Tabelle 4 zeigt die Werte von T_∞ und β_∞ für die nur durch Luftreibung gedämpfte Schwingung (offener Messkreis, $R_a = \infty$).

Tabelle 4 Beobachtung der abklingenden Schwingung für verschiedene Messkreiswiderstände (Dämpfungswiderstände) R_a . Gemessen: Schwingungsdauer T (daraus ω und ω^2) und Abklingkonstante $\beta = \ln(\varphi_k/\varphi_{k+n})/(nT)$, siehe Text. Dauer der nur durch Luftreibung gedämpften Schwingung $T_\infty = 1,480 \pm 0,005$ s, zugehörige Abklingkonstante $\beta_\infty = 0,07917 \pm 0,00144$ s⁻¹ (2016_9_24_A)

R_a / k Ω	T / s	ω / s ⁻¹	ω^2 / s ⁻²	β / s ⁻¹	β^2 / s ⁻²	$(\beta - \beta_\infty)^{-1}$
1	2,1 ± 0,1	2,992	8,952	1,908	3,640	0,5468
1,2	1,89 ± 0,06	3,324	11,052	1,811	3,280	0,5774
1,5	1,80 ± 0,05	3,491	12,185	1,534	2,351	0,6876
2,2	1,72 ± 0,03	3,653	13,345	1,083	1,173	0,9962
3,3	1,62 ± 0,02	3,879	15,043	0,7853	0,617	1,4162
3,9	1,59 ± 0,02	3,952	15,616	0,6729	0,451	1,6844
4,7	1,58 ± 0,01	3,977	15,814	0,5439	0,296	2,1514
5,6	1,56 ± 0,01	4,028	16,222	0,4774	0,228	2,5111
∞	1,48 ± 0,005	4,245	18,023	0,07917	0,006268	–

Zunächst wurde geprüft, ob die bei endlich großem R_a gemessenen Schwingungsdauern T für $R_a \rightarrow \infty$ ($\beta \rightarrow \beta_\infty$) gegen den *nur-Luftreibungs*-Wert $T_\infty = 1,480 \pm 0,005$ s oder gegen das entsprechende $\omega_\infty^2 = 18,023 \pm 0,18$ s⁻² der letzten Zeile streben. Nach Gl. (9) sollte nämlich gelten

$$\omega_\infty^2 = \omega_0^2 - \beta_\infty^2$$

Abbildung 8 zeigt die gemessenen Werte von ω^2 als Funktion von β^2 (Spalten 4 und 6 der Tabelle 4), und zwar für die fünf größten Widerstandswerte R_a (2,2 .. 5,6 k Ω). Die Anpassung einer leicht

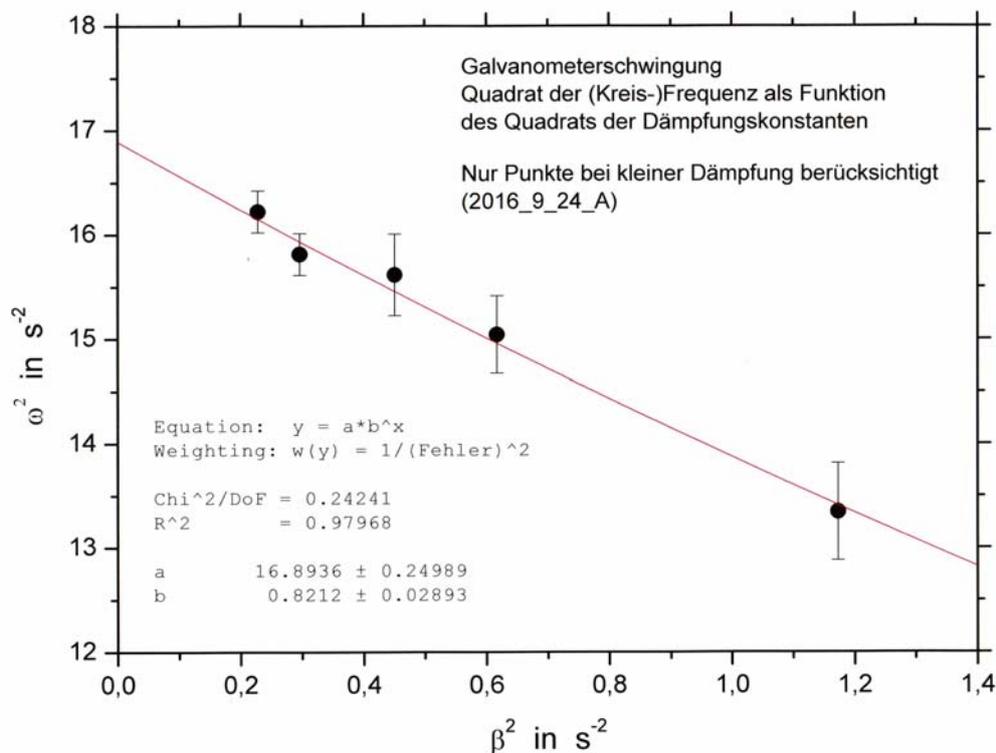


Abbildung 8 Kreisfrequenz der Galvanometerschwingung als Funktion der Abklingkonstanten - gemessen in Schaltung Abbildung 7

gekrümmten Kurve an die Punkte ergab für den nach $\beta_\infty^2 = 0,07917^2$ s⁻² extrapolierten Wert $(\omega_\infty^2)_{\text{extrapoliert}} = 16,87 \pm 0,24$ s⁻². Dieser Wert stimmt *nicht* mit dem gemessenen $\omega_\infty^2 = 18,02 \pm$

0,18 s⁻² (letzte Zeile der Tabelle 4) überein. Der Unterschied der beiden Werte (etwa 7 %) deutet aber nicht auf größere systematische Fehler hin. Deshalb wird als Ergebnis der Messung das (ungewichtete) Mittel beider Werte angegeben:

$$\omega_{\infty}^2 = 17,45 \pm 0,58 \text{ s}^{-2}.$$

Damit folgt

$$\omega_{\infty} = 4,177 \pm 0,069 \text{ s}^{-1}$$

$$T_{\infty} = 1,504 \pm 0,025 \text{ s}$$

Der Fehler von ω_{∞}^2 wurde so angegeben, dass er den gemessenen und den extrapolierten Wert gerade einschließt. Die Schwingungsdauer T_{∞} ist daher mit einer Genauigkeit von etwa $\pm 1,7 \%$ bestimmt worden.

Für die Schwingungsdauer T_0 der *ungedämpften* Schwingung erhält man durch Umformung (kleine Rechenübung) aus Gl. (9)

$$T_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\beta_{\infty} T_{\infty}}{2\pi}\right)^2}} T_{\infty}.$$

Setzt man die Zahlenwerte $\beta_{\infty} = 0,0792 \text{ s}^{-1}$ und $T_{\infty} = 1,504 \text{ s}$ ein, folgt $T_0 = 1,00018 T_{\infty}$, so dass innerhalb der Messgenauigkeit die beiden Schwingungsdauern gleich groß sind: $T_0 = T_{\infty}$. Im Folgenden wird deshalb nicht mehr zwischen T_0 und T_{∞} unterschieden und nur noch die Bezeichnung T_0 verwandt. Auch die Kreisfrequenz ω_{∞} wird in ω_0 „umbenannt“.

Im zweiten Teil der Auswertung geht es um die Werte von $1/(\beta - \beta_{\infty})$, aufgetragen als Funktion von R_a . Nach Gl. (12) sollten die entsprechenden Messpunkte auf einer Geraden mit der Steigung $2J/G^2$ und dem Achsenabschnitt $2JR_i/G^2$ liegen. Abbildung 9 zeigt die so aufgetragenen Punkte und

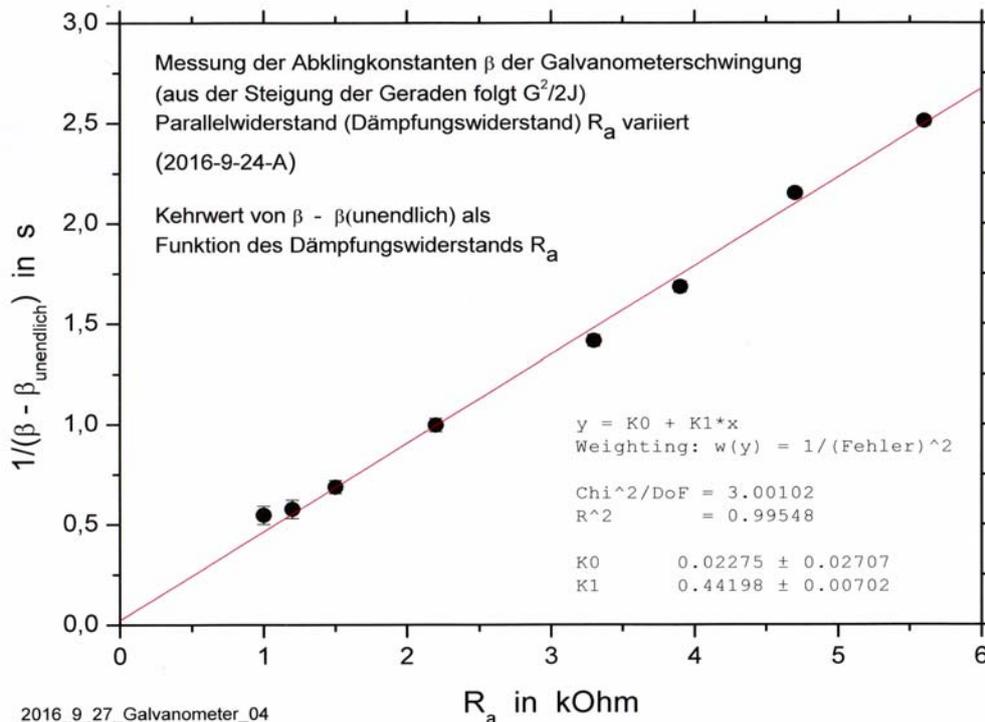


Abbildung 9 Dämpfung der Galvanometerschwingung. Messung in Schaltung Abbildung 7, siehe Text.

eine an die Punkte angepasste Gerade ($\chi^2/\text{Freiheitsgrad} = 3,0$). Sie geht innerhalb der Fehlergrenzen durch den Nullpunkt, so dass aus dem Achsenabschnitt keine Information zu entnehmen ist. Ihre Steigung ist

$$2J/G^2 = 0,4420 \pm 0,0070 \text{ s/k}\Omega,$$

oder

$$G^2/2J = (2,263 \pm 0,036) \cdot 10^3 \text{ V/As}.$$

Aus dieser Größe lassen sich, zusammen mit den bisher bestimmten Werten von C_I , ω_0 und β_∞ , die Galvanometerkonstante G und die Kenndaten des Torsionssystems (J , D und ρ) bestimmen.

6. Bestimmung der Galvanometerkonstanten G

Die Galvanometerkonstante ist gleich dem magnetischen Fluss durch die Windungen der Drehspule, multipliziert mit deren Windungszahl. Sie ergibt sich in folgender Weise aus den Messdaten. Aus Gl. (19) in ¹ folgt

$$\frac{G}{J} = C_I \omega_0^2$$

und damit

$$\frac{G}{J} = (3,84 \pm 0,07) \cdot 10^4 \frac{\text{rad}}{\text{A}} \cdot (17,45 \pm 0,58) \text{ s}^{-2} = (6,694 \pm 0,350) \cdot 10^5 \frac{\text{rad}}{\text{As}^2}.$$

Aus der Messung der Abklingkonstanten ergibt sich andererseits (siehe oben)

$$\frac{G^2}{J} = 2 \cdot \frac{G^2}{2J} = 2 \cdot (2,263 \pm 0,036) \cdot 10^3 \frac{\text{V}}{\text{As}} = (4,526 \pm 0,072) \cdot 10^3 \frac{\text{V}}{\text{As}}.$$

Daraus folgt durch Division die Galvanometerkonstante

$$G = (6,76 \pm 0,46) \cdot 10^{-3} \text{ Vs}$$

mit einem prozentualen Fehler von $\pm 7 \%$.

7. Bestimmung der Kenndaten des Torsionssystems

Das Trägheitsmoment J , die Winkelrichtgröße D und der Luftreibungskoeffizient ρ des Torsionspendels lassen sich mit Hilfe der Formeln

$$J = \frac{G}{C_I \omega_0^2}$$

$$D = \frac{G}{C_I}$$

$$\rho = 2\beta_\infty J$$

berechnen. Setzt man die bisher bekannten Zahlen ein, ergeben sich folgende Werte:

$$J = 1,01 \cdot 10^{-8} \text{ kg m}^2$$

$$D = 1,76 \cdot 10^{-7} \text{ Nm}.$$

$$\rho = 1,60 \cdot 10^{-9} \text{ kg m}^2 / \text{s}$$

Herstellerangaben zu diesen Größen liegen nicht vor, ein Vergleich ist daher nicht möglich. Deshalb sind auch keine Fehler angegeben. Die Daten sind aber der Größenordnung nach plausibel.

8. Aperiodischer Grenzwiderstand

Der aperiodische Grenzwiderstand $R_{a,Gr}$ lässt sich nach

$$R_{a,Gr} = \frac{G^2}{2\sqrt{DJ} - \rho} - R_i$$

aus den oben angegebenen Daten des Torsionspendels und dem Wert des Innenwiderstands R_i berechnen (Gl. (23) in ¹). In unserem Fall ist

$$\begin{aligned} R_{a,Gr} &= \frac{(6,76 \cdot 10^{-3} \text{ Vs})^2}{2\sqrt{1,76 \cdot 10^{-7} \text{ Nm} \cdot 1,01 \cdot 10^{-8} \text{ kg m}^2} - 1,60 \cdot 10^{-9} \text{ kg m}^2 / \text{s}} - 58,6 \Omega \\ (14) \quad &= 552,4 \Omega - 58,6 \Omega \\ &= 493,8 \Omega \end{aligned}$$

Eine weitere Möglichkeit, $R_{a,Gr}$ zu bestimmen, macht Gebrauch von der Bedingung, dass für den aperiodischen Grenzfall gilt $\beta = \omega_0$. Das heißt, der Grenzwiderstand lässt sich aus dem Graphen $1/(\beta - \beta_\infty) = f(R_a)$ ablesen (Abbildung 9), und zwar als Stelle (horizontale Achse), für den $1/(\beta - \beta_\infty)$ den Wert $1/(\omega_0 - \beta_\infty)$ annimmt (vertikale Achse). Diese zweite Art der Auswertung ist nicht unabhängig von der in Gl. (14) dargestellten Rechnung. Denn aus den Daten, die im Graphen von Abbildung 9 dargestellt sind, wurden die in Gl. (14) eingesetzten Werte für G , J und ρ bestimmt. Die nachfolgende Rechnung ist daher eine Art „Rechenprobe“. In unserem Fall lautet die Gleichung der Ausgleichsgeraden durch die Messpunkte in Abbildung 9

$$\frac{1}{(\beta - \beta_\infty) / \text{s}^{-1}} = 0,0228 + 0,4420 \cdot \frac{R_a}{\Omega}$$

Setzt man ein $\beta = \omega_0 = 4,177 \text{ s}^{-1}$, $\beta_\infty = 0,07912 \text{ s}^{-1}$ und löst nach R_a auf, folgt

$$R_{a,Gr} = 500,5 \Omega.$$

Dieser Wert weicht etwa 1% von dem oben berechneten ab. Die Differenz lässt sich durch Rundungsfehler bei der Rechnung erklären. Als periodischer Grenzwiderstand wird der Mittelwert aus $493,8 \Omega$ und $500,5 \Omega$ betrachtet:

$$R_{a,Gr} = 498 \pm 59 \Omega$$

Der Fehler $\pm 59 \Omega$ lässt sich aus der Streuung der Messpunkte in Abbildung 9 abschätzen, er beträgt etwa $\pm 12\%$.

9. Ballistische Empfindlichkeit C_B

Lässt man einen Strom sehr kurzer Dauer durch das Galvanometer fließen, ist der Ausschlag φ_B des Messzeigers am ersten Umkehrpunkt proportional zur Ladung Q , die während des Stromstoßes durch das Instrument geflossen ist (Gl. (28) in ¹). Bei sehr kleiner Dämpfung gilt

$$\varphi_B = \frac{G}{J\omega_0} Q.$$

Der Proportionalitätsfaktor

$$C_B = \frac{G}{J\omega_0}$$

heißt *ballistische Empfindlichkeit*. Abbildung 10 zeigt eine Messanordnung, mit der sich C_B bestimmen lässt. Ein Kondensator (Kapazität C) wird zunächst im linken Stromkreis aufgeladen (Taster $Ta1$ schließen) und anschließend im rechten Stromkreis entladen (Taster $Ta2$ schließen).

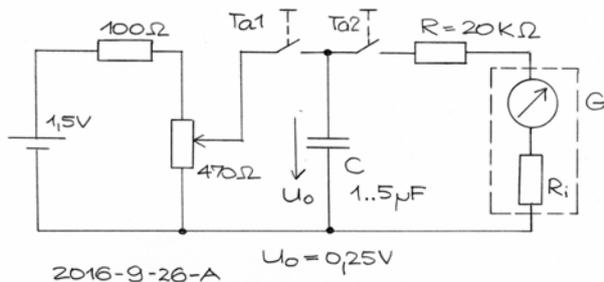


Abbildung 10 Messung der Ballistischen Empfindlichkeit C_B

Der rechte Stromkreis besteht aus dem Instrument und einem Vorwiderstand $R = 20 \text{ k}\Omega$. Der Kondensator wird auf eine konstante Spannung $U_0 = 0,25 \text{ V}$ aufgeladen. Gemessen wird der ballistische Ausschlag φ_B für verschiedene Werte der Kapazität C . Die während des Stromstoßes fließende Ladung ist $Q = CU_0$. Im vorliegenden Experiment ist die Kapazität C maximal $5 \mu\text{F}$. Das heißt, die Dauer des Stromstoßes ist von der Größenordnung $RC = 20 \text{ k}\Omega \cdot 5 \mu\text{F} = 0,1 \text{ s}$. Das sind etwa 7 % der Schwingungsdauer des Galvanometers. Dieser Wert ist gerade noch verträglich mit der Forderung, dass die Dauer des Stromstoßes klein gegenüber der Schwingungsdauer ist.

Tabelle 5 Ballistische Empfindlichkeit des Galvanometers. $U_0 = 0,25 \text{ V}$ konstant, C variiert, $Q = CU_0$, Vorwiderstand $R = 20 \text{ k}\Omega$ konstant, gemessen wird der Winkelausschlag φ_B am ersten Umkehrpunkt (2016_9_26_A)

$C / \mu\text{F}$	$Q / \mu\text{C}$	φ_B / rad
1	0,25	0,03594
2	0,50	0,07738
3	0,75	0,11398
4	1,00	0,14756
5	1,25	0,17982

In Abbildung 11 ist der ballistische Ausschlag φ_B des Galvanometers als Funktion der durch das Instrument geflossenen Ladung Q dargestellt. Die Proportionalität von φ_B und Q ist klar erkennbar: Die Anpassung einer Geraden nach der Methode der kleinsten Quadrate liefert eine Gerade durch den Nullpunkt mit der Steigung

$$C_B = (1,48 \pm 0,04) \cdot 10^5 \text{ rad/As}$$

($\chi^2/\text{Freiheitsgrad} = 1,08$ und $R^2 = 0,998$). Die Theorie ergibt

$$C_B = C_I \omega_0.$$

Aus den in diesem Experiment bestimmten Daten folgt für $C_I \omega_0$ der Zahlenwert

$$C_I \omega_0 = (3,84 \pm 0,07) \cdot 10^{-2} \frac{\text{rad}}{\mu\text{A}} \cdot (4,18 \pm 0,07) \text{ s}^{-1} = (1,60 \pm 0,06) \cdot 10^5 \frac{\text{rad}}{\text{As}}.$$

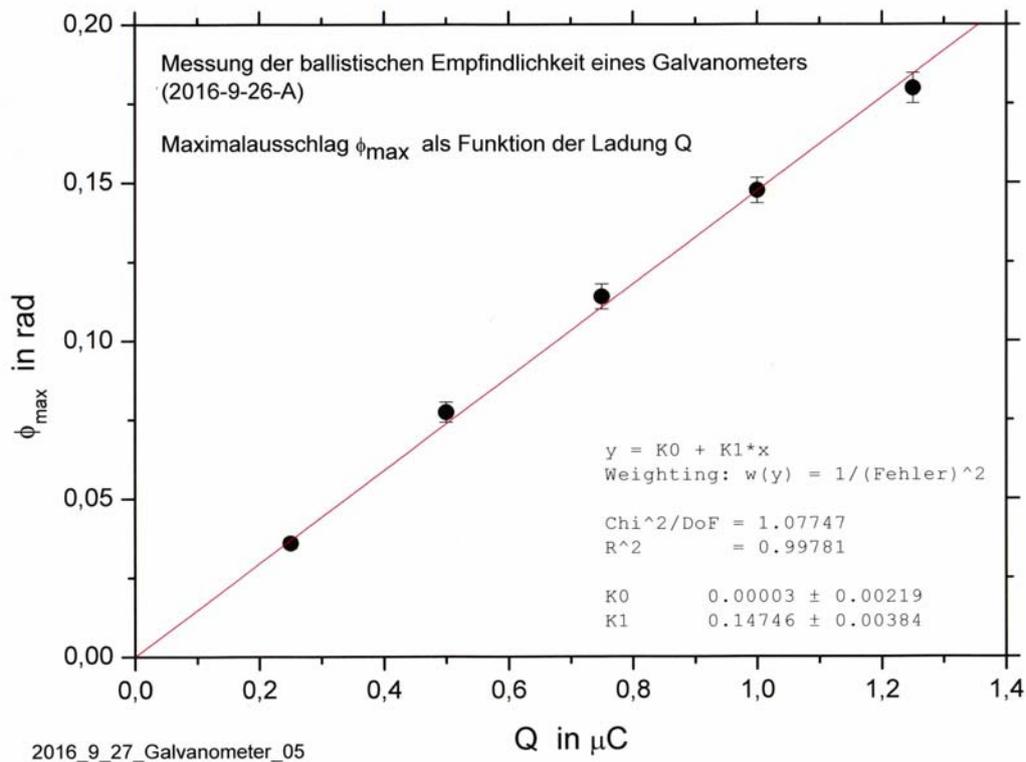


Abbildung 11 Ballistische Empfindlichkeit des Galvanometers, gemessen in Schaltung Abbildung 10.

Die Übereinstimmung mit dem Wert $C_B = (1,48 \pm 0,04) \cdot 10^5 \text{ rad/As}$ ist nicht besonders gut. Vermutlich wurden die Fehler der beiden Größen C_I und C_B zu klein abgeschätzt.

10. Vergleich mit den Herstellerangaben

In Tabelle 6 sind die hier bestimmten Galvanometerdaten aufgelistet, zusammen mit den entsprechenden Herstellerangaben, soweit vorhanden. Die Spannungsempfindlichkeit

$$C_U = \frac{C_I}{R_i + R_a}$$

hängt ab vom Messkreiswiderstand R_a . Aus den Herstellerangaben geht nicht hervor, welcher Wert für diese Größe eingesetzt wurde. Daher ist hier kein Vergleich möglich.

Für die Größen C_I , R_i , $R_{a,Gr}$ und T_0 , bei denen ein Vergleich möglich ist, stimmen die hier gemessenen Werte in etwa mit den vom Hersteller angegebenen überein. Grobe systematische Fehler bei den Messungen kann man daher ausschließen.

Tabelle 6 Zusammenstellung der hier bestimmten Kenndaten, Vergleich mit den Herstellerangaben

Größe	vorliegende Messung	Hersteller
Stromempfindlichkeit C_I	$(3,84 \pm 0,07) \cdot 10^{-2} \text{ rad}/\mu\text{A}$	$2,3 \cdot 10^{-2} \dots 8,8 \cdot 10^{-2} \text{ rad}/\mu\text{A}$
Spannungsempfindlichkeit C_U	$(6,54 \pm 0,71) \cdot 10^{-4} \text{ rad}/\mu\text{V}$ *)	$1,2 \cdot 10^{-4} \dots 3,8 \cdot 10^{-4} \text{ rad}/\mu\text{V}$
Ballistische Empfindlichkeit C_B	$0,148 \pm 0,004 \text{ rad}/\mu\text{As}$	
Innenwiderstand R_i	$58,6 \pm 5,3 \ \Omega$	$60 \ \Omega$
Aperiodischer Grenzwiderstand $R_{a,Gr}$	$498 \pm 59 \ \Omega$	$620 \dots 1 \ \Omega$
Schwingungsdauer T_0	$1,504 \pm 0,025 \text{ s}$	$1,5 \text{ s}$
Galvanometerkonstante G	$(6,76 \pm 0,46) \cdot 10^{-3} \text{ Vs}$	
Trägheitsmoment J	$1,01 \cdot 10^{-8} \text{ kg m}^2$	
Winkelrichtgröße D	$1,76 \cdot 10^{-7} \text{ N m}$	
Luftreibungskoeffizient ρ	$1,60 \cdot 10^{-9} \text{ kg m}^2/\text{s}$	

*) nach obiger Formel für $R_a = 0 \ \Omega$

Anmerkungen

- ¹ Schwingungsverhalten des Galvanometers, s. Anhang
- ² Der linke Teil der Schaltung (1,5 V-Zelle, Spannungsmesser und 1 M Ω -Widerstand) stellt, messtechnisch gesehen, eine Konstantstromquelle dar: Der gegenüber dem Widerstand des Messkreises große Innenwiderstand von 1 M Ω bestimmt die Stromstärke im Kreis, nahezu unabhängig von dem Widerstand der Parallelschaltung von Galvanometer und R_S .
- ³ Mit etwas Übung schafft man das mit bloßem Auge. Die Genauigkeit reicht meist aus.

Anhang

„Schwingungsverhalten eines Torsions-Drehspulgalvanometers“.

(nächste Seite)

Schwingungsverhalten des Drehspul-Torsionsgalvanometers

Kein physikalisches Grundpraktikum ohne den Versuch „Galvanometer“. Während des Studiums galt er als *hardcore physics*. Denn uns Studenten fehlte in den Anfangssemestern die Mathematik dazu (Differenzialgleichungen wurden erst später behandelt) – und meist auch die Zeit für die Vorbereitung. Hier also eine kleine Zusammenstellung der Physik des Torsions-Galvanometers und der dazu benötigten Mathematik.

1. Bewegungsgleichung

Abbildung 1 zeigt den prinzipiellen Aufbau eines Torsions-Drehspulgalvanometers. Die (Dreh-) Spule habe n Windungen, ihre Breite sei b , ihre Länge l . Ihre Windungen stehen auf der gesamten

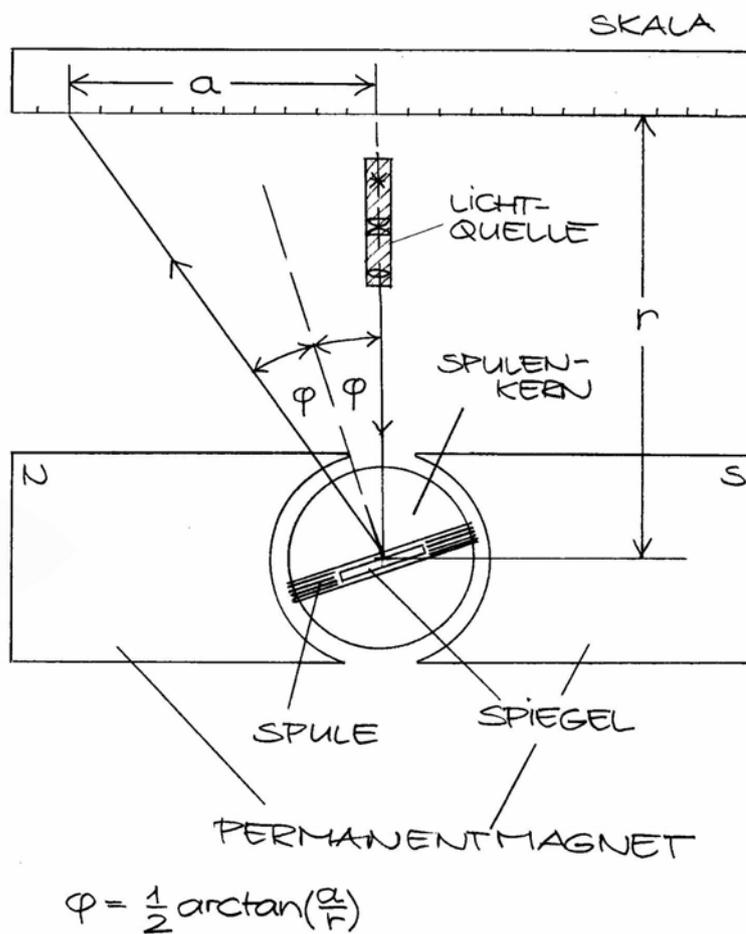


Abbildung 1 Prinzipieller Aufbau eines Galvanometers. Ansicht von oben.

Länge l senkrecht zu den Feldlinien des Magnetfelds, das der Permanentmagnet erzeugt. Die Lorentzkraft F auf eine der beiden Seitenwindungen ist

$$(1) \quad F = nBl.$$

Dabei ist B die Feldstärke des Magnetfeldes und I der Strom durch die Spule. Da die Kraft F an beiden Seitenwindungen angreift, übt sie auf das Schwingungssystem (Spulenkörper und Torsionsfaden mit Spiegel) das Drehmoment

$$(2) \quad T = 2F \cdot b/2 = Fb = nBIlb$$

aus. Das Produkt lb ist die Querschnittsfläche A der Spule, also

$$(3) \quad A = lb.$$

Das Drehmoment lässt sich daher schreiben

$$T = nBIA.$$

Die Faktoren n , B und A der rechten Seite fasst man zur *Galvanometerkonstanten* G zusammen:

$$(4) \quad G = nBA.$$

Damit ist das Drehmoment, das durch den Strom I durch die Spule hervorgerufen wird,

$$(5) \quad T = GI.$$

Diesem Drehmoment stehen mehrere rücktreibende Drehmomente gegenüber:

- Das Rückstellmoment

$$- D\varphi$$

der Spiralfeder. Dabei ist D die Federkonstante oder Winkelrichtgröße der Feder und φ der Winkelausschlag des Spiegels. Im statischen Fall ist $D\varphi$ gleich dem vom Strom erzeugten Drehmoment GI , so dass φ proportional zum Strom I ist. Ein Drehspulinstrument ist demnach zunächst ein Strommesser – und zwar mit dem Vorteil einer linearen Skala.

- Das Drehmoment der Luftreibung

$$- \rho \dot{\varphi},$$

das in guter Näherung proportional zur Winkelgeschwindigkeit ist.

- Das Drehmoment der elektromagnetischen Dämpfung, hervorgerufen durch die Bewegung der Spule im Magnetfeld des Permanentmagneten. Zur Berechnung gehen wir aus vom magnetischen Fluss dieses Feldes durch die Spule. Der ändert sich bei der Drehung im Magnetfeld mit der Zeit, so dass an den Enden der Spule eine Spannung induziert wird. Der magnetische Fluss durch die Spule ist

$$\phi = Blb \sin \varphi \cong Blb \varphi = BA\varphi,$$

wobei die Näherung für kleine Winkel φ gilt. Dessen zeitliche Ableitung ist

$$\dot{\phi} = BA \dot{\varphi}.$$

Also wird die Spannung

$$U_{ind} = -n\dot{\phi} = -nBA\dot{\varphi} = -G\dot{\varphi}$$

induziert. Diese Spannung treibt bei der Messung an einem äußeren Widerstand R_a den Strom

$$I_{ind} = -\frac{U_{ind}}{R_a + R_i}$$

durch den Messkreis. Dabei ist R_i der Innenwiderstand des Galvanometers. Dieser „induzierte“ Strom wirkt dem zu messenden Strom I entgegen, daher das Minuszeichen (*Lenz'sche Regel*). Insgesamt fließt der Strom

$$I_{ges} = I - I_{ind} = I - \frac{U_{ind}}{R_a + R_i} = I - \frac{G}{R_a + R_i} \dot{\varphi}.$$

Das gesamte „elektrische“ Drehmoment auf die Spule ist daher, wenn neben dem eingprägten Strom I auch I_{ind} berücksichtigt wird,

$$T = GI_{ges} = G \left(I - \frac{G}{R_a + R_i} \dot{\varphi} \right) = GI - \frac{G^2}{R_a + R_i} \dot{\varphi}.$$

Dabei ist der Term GI , wie man unschwer erkennt, das schon in Gl. (5) genannte Drehmoment des eingprägten (zu messenden) Stroms, während der zweite Term das Moment infolge der elektromagnetischen Dämpfung darstellt.

Insgesamt wirken damit vier Drehmomente auf unser Torsionssystem: Das „vorwärts“ wirkende Moment, das durch den zu messenden Strom erzeugt wird, und die drei rücktreibenden Momente der Spiralfeder, des Luftwiderstandes und der elektromagnetischen Dämpfung. Die Bewegungsgleichung für das Torsionssystem lautet demnach

$$J \ddot{\varphi} = GI - D\varphi - \rho \dot{\varphi} - \frac{G}{R_a + R_i} \dot{\varphi},$$

oder, in der üblichen Schreibweise

$$(6) \quad J \ddot{\varphi} + \left(\rho + \frac{G^2}{R_a + R_i} \right) \dot{\varphi} + D\varphi = GI.$$

Dabei ist J das Trägheitsmoment unseres Systems. Die Differenzialgleichung beschreibt eine abklingende harmonische Schwingung um den Nullpunkt $\varphi = GI/D$. Mit den Abkürzungen

$$(7) \quad 2\beta = \frac{1}{J} \left(\rho + \frac{G^2}{R_a + R_i} \right)$$

und

$$(8) \quad \omega_0^2 = \frac{D}{J}$$

lautet sie

$$(9) \quad \ddot{\varphi} + 2\beta \dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = \frac{G}{J} I.$$

2. Lösung der Bewegungsgleichung

2.1 Ansatz, allgemeine Lösung und Randbedingungen

Wie üblich macht man zur Lösung von Gl. (9) den Ansatz

$$\varphi(t) = C \exp(\lambda t) + \varphi_0.$$

Die Ableitungen sind

$$\dot{\varphi}(t) = \lambda C \exp(\lambda t) \quad \text{und} \quad \ddot{\varphi}(t) = \lambda^2 C \exp(\lambda t).$$

Setzt man diese in Gl. (9) ein, folgt

$$(\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2) C \exp(\lambda t) + \omega_0^2 \varphi_0 = \frac{G}{J} I.$$

Diese Gleichung muss für *alle* Zeiten t erfüllt sein. Das ist nur dann der Fall, wenn die Klammer der linken Seite verschwindet und der von t unabhängige Term gleich der rechten Seite ist. Aus der zweiten Forderung folgt

$$(10) \quad \varphi_0 = \frac{G}{J\omega_0^2} I = \frac{G}{D} I.$$

Das ist die schon erwähnte statische Lösung ($\ddot{\varphi} = \dot{\varphi} = 0$). Die erste Forderung führt auf die Gleichung

$$(11) \quad \lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

mit den Lösungen

$$(12) \quad \lambda_{1,2} = -\beta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

Mit der Abkürzung

$$(13) \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2},$$

werden diese zu

$$(14) \quad \lambda_{1,2} = -\beta \pm i\omega.$$

Die allgemeine Lösung von Gl. (9) lautet also

$$(15) \quad \varphi(t) = C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t) + \varphi_0$$

mit $\lambda_{1,2}$ nach Gl. (14). Die Konstanten C_1 und C_2 ergeben sich aus den Anfangsbedingungen. Wir beschränken uns auf den „einfachen“ Fall, dass die Anfangsauslenkung um den Winkel ϕ_0 größer ist als der Winkel φ_0 der Ruhelage, und dass die Anfangs-Winkelgeschwindigkeit Null ist. Also auf die Bedingungen

$$(16) \quad \begin{aligned} \varphi(0) &= \phi_0 + \varphi_0 \\ \dot{\varphi}(0) &= 0 \end{aligned}.$$

Das führt zu den Gleichungen

$$\begin{aligned} \phi_0 &= C_1 + C_2 \\ 0 &= \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 \end{aligned}$$

mit den Lösungen

$$C_1 = \frac{\phi_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \lambda_2 \quad \text{und} \quad C_2 = -\frac{\phi_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \lambda_1.$$

Unsere spezielle Lösung lautet somit

$$(17) \quad \varphi(t) = \frac{\phi_0}{\lambda_2 - \lambda_1} [\lambda_2 \exp(\lambda_1 t) - \lambda_1 \exp(\lambda_2 t)] + \varphi_0.$$

Die Art der Bewegung hängt nun ab, ob ω_0 größer, kleiner oder gleich β ist.

2.2 Schwingfall

Wir betrachten zunächst den Fall $\omega_0 > \beta$. Wegen $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ (Gl. (13)) ist ω dann reell und es folgt

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \frac{\phi_0}{-2i\omega} [(-\beta - i\omega)\exp(-\beta t + i\omega t) - (-\beta + i\omega)\exp(-\beta t - i\omega t)] + \varphi_0 \\
&= \frac{\phi_0}{-2i\omega} \exp(-\beta t) [-i\omega[\exp(i\omega t) + \exp(-i\omega t)] - \beta[\exp(i\omega t) - \exp(-i\omega t)]] + \varphi_0 \\
(18) \quad &= \phi_0 \exp(-\beta t) \left[\frac{\exp(i\omega t) + \exp(-i\omega t)}{2} + \frac{\beta \exp(i\omega t) - \exp(-i\omega t)}{\omega 2i} \right] + \varphi_0 \\
&= \phi_0 \exp(-\beta t) \left[\cos(\omega t) + \frac{\beta}{\omega} \sin(\omega t) \right] + \varphi_0
\end{aligned}$$

Damit ist die Bewegung in diesem Fall eine exponentiell abklingende Schwingung um die Ruhelage φ_0 , ausgehend von der Anfangsauslenkung $\phi_0 + \varphi_0$. Die Frequenz ist ω , die Schwingungsdauer

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Gleichung (18) zeigt, dass der Zeiger des Galvanometers nach Abklingen der Schwingung um den Winkel

$$\varphi_0 = \frac{G}{J\omega_0^2} I$$

ausgelenkt ist – also um einen Winkel proportional zum Strom I , der durch die Spule fließt. Der Proportionalitätsfaktor

$$(19) \quad C_I = \frac{G}{J\omega_0^2}$$

wird *Stromempfindlichkeit* des Galvanometers genannt.

2.3 Kriechfall

Im zweiten Fall ist $\omega_0 < \beta$, daher wird $\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ imaginär. Wir definieren $\omega = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$, so dass

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \omega$$

reell ist. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \frac{\phi_0}{-2\omega} [(-\beta - \omega)\exp(-\beta t + \omega t) - (-\beta + \omega)\exp(-\beta t - \omega t)] + \varphi_0 \\
&= \frac{\phi_0}{-2\omega} \exp(-\beta t) [-\omega[\exp(\omega t) + \exp(-\omega t)] - \beta[\exp(\omega t) - \exp(-\omega t)]] + \varphi_0 \\
(20) \quad &= \phi_0 \exp(-\beta t) \left[\frac{\exp(\omega t) + \exp(-\omega t)}{2} + \frac{\beta \exp(\omega t) - \exp(-\omega t)}{\omega 2} \right] + \varphi_0 \\
&= \phi_0 \exp(-\beta t) \left[\cosh(\omega t) + \frac{\beta}{\omega} \sinh(\omega t) \right] + \varphi_0
\end{aligned}$$

Die entsprechende Bewegung wird üblicherweise als „Kriechen“ bezeichnet: Der Zeiger bewegt sich von seiner Anfangsauslenkung $\phi_0 + \varphi_0$ langsam und ohne Richtungsänderung auf die Ruhelage φ_0 zu. Der Wert von φ_0 ist derselbe wie im Schwingfall.

2.4 Aperiodischer Grenzfall

Im dritten Fall ist $\omega_0 = \beta$. Dann folgt $\lambda_2 = \lambda_1 = -\beta$ und der Nenner auf der rechten Seite von Gl. (17) wird Null. Damit ist diese Gleichung als Lösung unbrauchbar. Der Mathematiker entnimmt man, dass jetzt der Ansatz

$$\varphi(t) = A(1 + Bt)\exp(\lambda t) + \varphi_0$$

die Bewegungsgleichung löst. Wir bilden zunächst die Ableitungen

$$\dot{\varphi}(t) = A\exp(\lambda t)(B + \lambda + B\lambda t)$$

und

$$\ddot{\varphi}(t) = A\exp(\lambda t)(2B\lambda + \lambda^2 + \lambda^2 Bt).$$

Setzt man diese in Gl. (9) ein, folgt

$$A\exp(\lambda t)[\{2B(\lambda + \beta) + (\lambda^2 + 2\beta\lambda + \beta^2)\} + B(\lambda^2 + 2\beta\lambda + \beta^2)t] + \beta^2\varphi_0 = \frac{G}{J}I.$$

Auch diese Gleichung muss für alle Zeiten t erfüllt sein. Daher folgt, wie oben,

$$\varphi_0 = \frac{G}{J\beta^2}I = \frac{G}{J\omega_0^2}I$$

und

$$\{2B(\lambda + \beta) + (\lambda^2 + 2\beta\lambda + \beta^2)\} + B(\lambda^2 + 2\beta\lambda + \beta^2)t = 0.$$

Die Klammer, die als Faktor bei t steht, ist gleich $(\lambda + \beta)^2$ und wird Null für $\lambda = -\beta$. Die geschweifte Klammer wird dann ebenfalls Null – sozusagen „automatisch“. Damit lautet die Lösung

$$(21) \quad \varphi(t) = A(1 + Bt)\exp(-\beta t) + \varphi_0.$$

Als Randbedingungen geben wir, wie in Gl. (16), vor

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \varphi_0 + \varphi_0 \\ \dot{\varphi}(0) &= 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt (kleine Rechenübung) $A = \varphi_0$ und $B = \beta$ und die Lösung wird zu

$$(22) \quad \varphi(t) = \varphi_0(1 + \beta t)\exp(-\beta t) + \varphi_0.$$

Die zugehörige Bewegung ist, wie man aus $\omega_0 = \beta$ schließt, der Grenzfall zwischen „Schwingen“ und „Kriechen“, genannt *aperiodischer Grenzfall*. In der Messtechnik ist er von Bedeutung, da sich der Zeiger in diesem Fall in der kürzest möglichen Zeit zum „Messwert“ φ_0 hin bewegt – und ohne Überschwingen dort verharrt. Auch hier ist der Wert von φ_0 derselbe wie in den Fällen „Schwingen“ und „Kriechen“.

Der aperiodische Grenzfall lässt sich bei einer Messung mit dem Galvanometer herbeiführen, indem man den Widerstand R_a des Messkreises geeignet wählt. Mit den Termen für ω_0 und β nach Gln. (7) bzw. (8) folgt nämlich, dass $\omega_0 = \beta$ erfüllt ist, wenn gilt

$$\sqrt{\frac{D}{J}} = \frac{1}{2J} \left(\rho + \frac{G^2}{R_a + R_i} \right).$$

Daraus folgt

$$2\sqrt{DJ} = \rho + \frac{G^2}{R_a + R_i}$$

und weiter

$$(23) \quad R_{a,Gr} = \frac{G^2}{2\sqrt{DJ} - \rho} - R_i$$

Abbildung 2 zeigt den zeitlichen Verlauf der Zeigerauslenkung eines Galvanometers für die drei untersuchten Fälle. Dabei wurde als Schwingungsdauer $T = 1,5$ s angenommen. Als Ruhelage

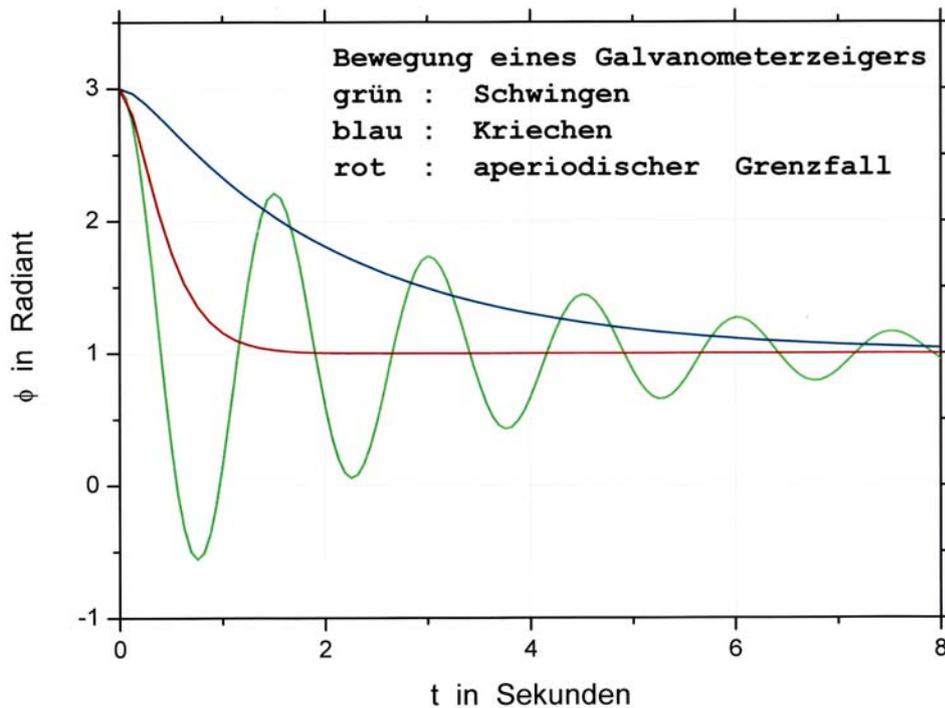


Abbildung 2 Schwingen, Kriechen und aperiodischer Grenzfall des Galvanometerzeigers. Siehe Text.

wurde der Einfachheit halber gewählt $\varphi_0 = 1$, als Anfangsauslenkung $\phi_0 = 3$ (in beliebiger Einheit, beispielsweise $1/10$ rad). Der Schwingfall wurde mit $\beta = 0,5/T$ realisiert, der Kriechfall mit $\beta = 4,8/T$. Im aperiodischen Grenzfall war, wie gefordert, $\beta = 2\pi/T$.

3. Ballistisches Galvanometer

Lässt man einen Strom von kurzer Dauer durch das Galvanometer fließen, kann das Instrument zur Messung der hindurch geflossenen Ladung verwandt werden. *Kurze Dauer* heißt, präziser formuliert, dass der Stromstoß nach weniger als 1% der Schwingungsdauer des Galvanometers abgeklungen ist. Nach dem Ende des Stromstoßes schwingt das Torsionssystem aus der Ruhelage bis zu einem Umkehrpunkt und kehrt dann je nach Dämpfung schwingend oder kriechend in die Gleichgewichtslage zurück. Der Ausschlag am Umkehrpunkt ist ein Maß für die im Stromstoß geflossene Ladung. Das Instrument arbeitet wie ein ballistisches Pendel, das Kraftstöße misst. Daher die Bezeichnung „ballistisches Galvanometer“.

Die Bewegungsgleichung des Torsionssystems gilt auch im ballistischen Fall. Gleichung (9) muss jedoch an die dabei vorliegenden Bedingungen angepasst werden. Zunächst ist zwischen der Zeitspanne des Stromflusses ($t < T_Q$) und der Zeit nachher ($t > T_Q$) zu unterscheiden:

(1) $t < T_Q$

Während der kurzen Dauer des Stromstoßes sind sowohl der Ausschlag φ als auch die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ des Galvanometers vernachlässigbar klein. Das heißt, Gl. (9) wird zu

$$(24) \quad \ddot{\varphi} = \frac{G}{J} I.$$

Da der Strom I gleich der zeitlichen Ableitung der hindurch fließenden Ladung Q ist, folgt

$$\ddot{\varphi} = \frac{G}{J} \dot{Q}.$$

Integriert man beide Seiten von $t = 0$ bis zum Ende T_Q des Stromstoßes, erhält man

$$\int_0^{T_Q} \ddot{\varphi} dt = \frac{G}{J} \int_0^{T_Q} \dot{Q} dt$$

oder

$$(25) \quad \dot{\varphi}(T_Q) = \frac{G}{J} Q.$$

(2) $t > T_Q$

Nach dem Ende des Stromstoßes schwingt das Galvanometer frei, so dass die rechte Seite von Gl. (9) Null ist:

$$\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0.$$

Diese Differenzialgleichung ist zu integrieren, und zwar für die Anfangsbedingungen

$$\varphi(0) = 0$$

$$\dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}(T_Q) = \frac{G}{J} Q.$$

Dabei wurde für $\dot{\varphi}(0)$ die vorhin berechnete Winkelgeschwindigkeit am Ende des Stromstoßes verwandt (Gl. (25)). Der (übliche) Lösungsansatz

$$\varphi(t) = C \exp(\lambda t)$$

ergibt

$$(26) \quad \varphi(t) = C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t)$$

(Gl. (15) ohne den Term φ_0). Der Einfachheit halber betrachten wir nur den Schwingfall $\omega_0 > \beta$.

Dann gilt

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm i\omega \quad \text{und} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

Setzt man die Anfangsbedingungen ein, folgt

$$C_1 + C_2 = 0$$

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = \dot{\varphi}_0 = \frac{G}{J} Q$$

und weiter

$$C_1 = \frac{\dot{\varphi}_0}{2i\omega}$$

$$C_2 = -\frac{\dot{\varphi}_0}{2i\omega}$$

Damit wird Gl. (26 zu

$$(27) \quad \varphi(t) = \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega} \exp(-\beta t) \left[\frac{\exp(i\omega t) - \exp(-i\omega t)}{2i} \right]$$

$$= \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega} \exp(-\beta t) \sin(\omega t)$$

Das heißt, das Galvanometer bewegt sich sinusförmig aus der Ruhelage heraus und schwingt dann gedämpft mit der Frequenz ω und der Abklingkonstanten β .

Die Messgröße ist (siehe oben) der Winkelausschlag am ersten Umkehrpunkt. Dieser ist

$$\varphi_B = \varphi(t = T/4) = \varphi(\omega t = \pi/2).$$

Setzt man sehr kleine Dämpfung voraus, also

$$\beta \ll 1 \quad \text{und} \quad \beta \ll \omega_0,$$

gilt näherungsweise $\omega = \omega_0$ und $\exp(-\beta T/4) \approx 1$. Dann wird

$$(28) \quad \varphi_B = \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega} \exp(-\beta T/4) \cong \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_0} = \frac{G}{J\omega_0} Q.$$

Der Winkelausschlag am ersten Umkehrpunkt ist damit proportional zur Ladung Q , die durch das Galvanometer geflossen ist. Der Quotient

$$(29) \quad C_B = \frac{G}{J\omega_0}$$

heißt *ballistische Empfindlichkeit*. Er ist mit der (statischen) *Stromempfindlichkeit* C_I (Gl. (19)) verknüpft durch

$$(29) \quad C_B = C_I \omega_0.$$

Auch bei größerer Dämpfung (β nicht vernachlässigbar klein) ist φ_B proportional zu Q . Jedoch schlägt jetzt der Faktor $\exp(-\beta T/4)$ zu Buch, so dass die ballistische Empfindlichkeit kleiner wird.

Literatur

¹ Wilhelm Walcher: Praktikum der Physik, B.G. Teubner, Stuttgart 1967; Wilhelm H. Westphal: Physikalisches Praktikum, Vieweg, Wiesbaden, 13. Auflage 1983.

Anleitungen zum Praktikumsversuch „Galvanometer“ im Internet, z. B. unter Adresse <https://lp.uni-goettingen.de/get/text/3931>.